

Funciones de varias variables

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO



Dados dos vectores en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define su **producto escalar** por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Dados dos vectores en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define su **producto escalar** por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición.

Dados dos vectores en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define su **producto escalar** por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (simetría).

Dados dos vectores en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define su **producto escalar** por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (simetría).
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (linealidad).

Dados dos vectores en \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se define su **producto escalar** por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición.

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (simetría).
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (linealidad).

La **norma (euclídea)** de un vector \mathbf{x} se define por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Deducimos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Deducimos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Por tanto, existe un único número $t \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos t = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Deducimos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Por tanto, existe un único número $t \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos t = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Se dice que dicho número t es la *medida en radianes del ángulo que forman los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} .*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Deducimos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Por tanto, existe un único número $t \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos t = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Se dice que dicho número t es la *medida en radianes del ángulo que forman los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y}* . Naturalmente, de la definición dada se deduce que

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos t.$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

Deducimos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Por tanto, existe un único número $t \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos t = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Se dice que dicho número t es la *medida en radianes del ángulo que forman los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y}* . Naturalmente, de la definición dada se deduce que

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos t.$$

Se dice que los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero.

Desigualdad triangular. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Desigualdad triangular. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (es decir, los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} están en una misma semirrecta que pasa por el origen).

Desigualdad triangular. *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (es decir, los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} están en una misma semirrecta que pasa por el origen).

Dados dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , el número $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ se llama la **distancia** (euclídea) entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

Para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

Para $\mathbf{a} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$B((\alpha, \beta), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2\}$$

es un círculo de centro (α, β) y radio r sin incluir la circunferencia que lo limita.

Para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

Para $\mathbf{a} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$B((\alpha, \beta), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2\}$$

es un círculo de centro (α, β) y radio r sin incluir la circunferencia que lo limita.

Para $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$B((\alpha, \beta, \gamma), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 < r^2\}$$

es una bola esférica de centro (α, β, γ) y radio r sin incluir la esfera que la limita.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$. El conjunto de todos los puntos exteriores de E se representa por $\text{ext}(E)$.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$. El conjunto de todos los puntos exteriores de E se representa por $\text{ext}(E)$. El conjunto de todos los puntos frontera de E se representa por $\text{Fr}(E)$.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$. El conjunto de todos los puntos exteriores de E se representa por $\text{ext}(E)$. El conjunto de todos los puntos frontera de E se representa por $\text{Fr}(E)$. Es claro que

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(E) \cup \text{Fr}(E) \cup \text{ext}(E)$$

donde la unión es disjunta.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$. El conjunto de todos los puntos exteriores de E se representa por $\text{ext}(E)$. El conjunto de todos los puntos frontera de E se representa por $\text{Fr}(E)$. Es claro que

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(E) \cup \text{Fr}(E) \cup \text{ext}(E)$$

donde la unión es disjunta.

Es evidente que $\text{int}(E) \subset E$. Se dice que el conjunto E es **abierto** si $\text{int}(E) = E$. Se dice que el conjunto E es **cerrado** si $E = \text{int}(E) \cup \text{Fr}(E)$.

Dado un conjunto no vacío, $E \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto E como sigue. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es

- **Interior** al conjunto E si *existe algún* $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset E$.
- **Exterior** a E , si es interior al complemento de E .
- **Frontera** de E , si no es interior ni exterior a E .

El conjunto de todos los puntos interiores de E se representa por $\text{int}(E)$. El conjunto de todos los puntos exteriores de E se representa por $\text{ext}(E)$. El conjunto de todos los puntos frontera de E se representa por $\text{Fr}(E)$. Es claro que

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(E) \cup \text{Fr}(E) \cup \text{ext}(E)$$

donde la unión es disjunta.

Es evidente que $\text{int}(E) \subset E$. Se dice que el conjunto E es **abierto** si $\text{int}(E) = E$. Se dice que el conjunto E es **cerrado** si

$E = \text{int}(E) \cup \text{Fr}(E)$. Puesto que $\text{ext}(E) = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus E)$, se verifica que E es cerrado si, y sólo si, su complemento $\mathbb{R}^n \setminus E$ es abierto.

Para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se verifica que el conjunto $B(\mathbf{x}, r)$ es abierto y se llama la **bola abierta de centro \mathbf{x} y radio r** .

Para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se verifica que el conjunto $B(\mathbf{x}, r)$ es abierto y se llama la **bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r** .

Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$, se verifica que el conjunto

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

es cerrado.

Para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se verifica que el conjunto $B(\mathbf{x}, r)$ es abierto y se llama la **bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r** .

Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$, se verifica que el conjunto

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

es cerrado. Dicho conjunto se llama **bola cerrada de centro \mathbf{a} y radio r** .

Para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se verifica que el conjunto $B(\mathbf{x}, r)$ es abierto y se llama la **bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r** .

Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$, se verifica que el conjunto

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

es cerrado. Dicho conjunto se llama **bola cerrada de centro \mathbf{a} y radio r** .

Para el caso en que $n = 2$, las bolas cerradas suelen llamarse **discos** y se usa la notación $\overline{B}((a, b), r) = D((a, b), r)$.

Para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se verifica que el conjunto $B(\mathbf{x}, r)$ es abierto y se llama la **bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r** .

Dados $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$, se verifica que el conjunto

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

es cerrado. Dicho conjunto se llama **bola cerrada de centro \mathbf{a} y radio r** .

Para el caso en que $n = 2$, las bolas cerradas suelen llamarse **discos** y se usa la notación $\overline{B}((a, b), r) = D((a, b), r)$.

Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** cuando hay un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in E$. Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** cuando es cerrado y acotado.

Un campo escalar de n variables es una función, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores reales.

Un campo escalar de n variables es una función, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores reales. La gráfica de dicho campo escalar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Un campo escalar de n variables es una función, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores reales. La gráfica de dicho campo escalar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 1$, dicha gráfica es una curva en \mathbb{R}^2 , para $n = 2$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . En estos dos casos podemos visualizar la gráfica. Para campos escalares de tres o más variables su gráfica es una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ que no se puede visualizar.

Un campo escalar de n variables es una función, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores reales. La gráfica de dicho campo escalar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 1$, dicha gráfica es una curva en \mathbb{R}^2 , para $n = 2$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . En estos dos casos podemos visualizar la gráfica. Para campos escalares de tres o más variables su gráfica es una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ que no se puede visualizar.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{a} \in E$. Se dice que f es **continuo** en \mathbf{a} si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se verifica $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ siempre que $\mathbf{x} \in E$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.

Un campo escalar de n variables es una función, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un subconjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^n$ que toma valores reales. La gráfica de dicho campo escalar es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para $n = 1$, dicha gráfica es una curva en \mathbb{R}^2 , para $n = 2$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . En estos dos casos podemos visualizar la gráfica. Para campos escalares de tres o más variables su gráfica es una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ que no se puede visualizar.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{a} \in E$. Se dice que f es **continuo** en \mathbf{a} si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se verifica $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ siempre que $\mathbf{x} \in E$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$. Se dice que f es continuo en E si es continuo en todo punto de E .

Teorema de Weierstrass. *Todo campo escalar continuo en un conjunto compacto alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.*

Teorema de Weierstrass. *Todo campo escalar continuo en un conjunto compacto alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.*

Dicho de otra forma, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y f es un campo escalar continuo en K , entonces hay puntos $\mathbf{a} \in K$, $\mathbf{b} \in K$ tales que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x} \in K$.

Las funciones siguientes:

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$

e) $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$

e) $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$

f) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$

e) $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$

f) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3$.

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}$.

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(\sqrt{x+y})$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3$.

e) $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}$.

f) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

son ejemplos de campos escalares. Las tres primeras son campos escalares de dos variables y las tres últimas de tres variables.

Las funciones siguientes:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$

b) $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$

c) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x+y}).$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$

e) $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$

f) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$

son ejemplos de campos escalares. Las tres primeras son campos escalares de dos variables y las tres últimas de tres variables. Los campos escalares en a) y en d) vienen dados por funciones polinómicas en dos y tres variables respectivamente.

Las funciones siguientes:

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$$

$$\text{b) } f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$$

$$\text{c) } f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(\sqrt{x+y}).$$

$$\text{d) } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$$

$$\text{e) } f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$$

$$\text{f) } f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$$

son ejemplos de campos escalares. Las tres primeras son campos escalares de dos variables y las tres últimas de tres variables. Los campos escalares en a) y en d) vienen dados por funciones polinómicas en dos y tres variables respectivamente. Los campos escalares en b) y en e) vienen dados por funciones racionales de dos y tres variables respectivamente, y están definidos donde el denominador es distinto de cero, es decir, en los conjuntos $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + x^2y^2 + y^3 \neq 0\}$ y $\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3z^2 + x^2y^2z + y^3 \neq 0\}$.

Las funciones siguientes:

$$a) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x^3y^2 + y^3.$$

$$b) f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y + xy + xy^2}{x^3 + x^2y^2 + y^3}.$$

$$c) f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(\sqrt{x+y}).$$

$$d) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz + z^2x^3y^2 + y^3.$$

$$e) f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2yz + z^2xy + xzy^2}{x^3z^2 + x^2y^2z + y^3}.$$

$$f) f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$$

son ejemplos de campos escalares. Las tres primeras son campos escalares de dos variables y las tres últimas de tres variables. Los campos escalares en a) y en d) vienen dados por funciones polinómicas en dos y tres variables respectivamente. Los campos escalares en b) y en e) vienen dados por funciones racionales de dos y tres variables respectivamente, y están definidos donde el denominador es distinto de cero, es decir, en los conjuntos $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + x^2y^2 + y^3 \neq 0\}$ y $\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3z^2 + x^2y^2z + y^3 \neq 0\}$. Muchos campos escalares, como los definidos en c) y en d), se obtienen componiendo funciones elementales de una variable con funciones polinómicas o racionales de varias variables.

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El punto $\gamma(a)$ se llama *origen* y el punto $\gamma(b)$ *extremo* de la curva.

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El punto $\gamma(a)$ se llama *origen* y el punto $\gamma(b)$ *extremo* de la curva. Naturalmente, como $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ podremos expresarlo por medio de sus componentes en la base canónica que serán funciones de t .

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El punto $\gamma(a)$ se llama *origen* y el punto $\gamma(b)$ *extremo* de la curva. Naturalmente, como $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ podremos expresarlo por medio de sus componentes en la base canónica que serán funciones de t .

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Las funciones $\gamma_k(t)$ se llaman funciones componentes de γ .

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El punto $\gamma(a)$ se llama *origen* y el punto $\gamma(b)$ *extremo* de la curva. Naturalmente, como $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ podremos expresarlo por medio de sus componentes en la base canónica que serán funciones de t .

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Las funciones $\gamma_k(t)$ se llaman funciones componentes de γ . Se dice que γ es derivable en un punto t cuando todas sus funciones componentes son derivables en dicho punto, en cuyo caso la derivada de γ en t es, por definición, el vector

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Una curva en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. El punto $\gamma(a)$ se llama *origen* y el punto $\gamma(b)$ *extremo* de la curva. Naturalmente, como $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ podremos expresarlo por medio de sus componentes en la base canónica que serán funciones de t .

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Las funciones $\gamma_k(t)$ se llaman funciones componentes de γ . Se dice que γ es derivable en un punto t cuando todas sus funciones componentes son derivables en dicho punto, en cuyo caso la derivada de γ en t es, por definición, el vector

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Dado un punto $\mathbf{a} = \gamma(t_0)$ tal que $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$, se define la **recta tangente** a γ en el punto \mathbf{a} (aunque es más apropiado decir *en el punto t_0*) como la recta de ecuación paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\gamma'(t_0)$, es decir, la recta que pasa por \mathbf{a} con vector de dirección $\gamma'(t_0)$.

Una **dirección** en \mathbb{R}^n es un vector de norma 1.

Una **dirección** en \mathbb{R}^n es un vector de norma 1.

Dados un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y una dirección \mathbf{u} , la recta que pasa por \mathbf{a} con dirección \mathbf{u} es la imagen de la aplicación $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$, es decir, es el conjunto de puntos $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$.

Una **dirección** en \mathbb{R}^n es un vector de norma 1.

Dados un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y una dirección \mathbf{u} , la recta que pasa por \mathbf{a} con dirección \mathbf{u} es la imagen de la aplicación $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$, es decir, es el conjunto de puntos $\{\mathbf{a} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, sea $\mathbf{a} \in E$ y \mathbf{u} una dirección. Se define la **derivada de f en \mathbf{a} en la dirección \mathbf{u}** como el límite

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} \quad (1)$$

La derivada direccional de un campo escalar f en un punto \mathbf{a} en la dirección del vector \mathbf{e}_k de la base canónica, se llama **derivada parcial** de f en \mathbf{a} respecto a la variable k -ésima.

La derivada direccional de un campo escalar f en un punto \mathbf{a} en la dirección del vector \mathbf{e}_k de la base canónica, se llama **derivada parcial** de f en \mathbf{a} respecto a la variable k -ésima. Está definida por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \end{aligned} \quad (2)$$

La derivada direccional de un campo escalar f en un punto \mathbf{a} en la dirección del vector \mathbf{e}_k de la base canónica, se llama **derivada parcial** de f en \mathbf{a} respecto a la variable k -ésima. Está definida por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \end{aligned} \quad (2)$$

y se representa con los símbolos $D_k f(\mathbf{a})$ y $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$.

La derivada direccional de un campo escalar f en un punto \mathbf{a} en la dirección del vector \mathbf{e}_k de la base canónica, se llama **derivada parcial** de f en \mathbf{a} respecto a la variable k -ésima. Está definida por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k} \end{aligned} \quad (2)$$

y se representa con los símbolos $D_k f(\mathbf{a})$ y $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$.

Observa que la segunda igualdad de (2) nos dice que, *para calcular la derivada parcial $D_k f(\mathbf{a})$, lo que se hace es derivar f respecto a la variable k -ésima considerando fijas las demás variables*. Por eso se llaman *derivadas parciales*.

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo.

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 f(x, y, z) = yz + 3z^2 x^2 y^2.$

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 f(x, y, z) = yz + 3z^2 x^2 y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = D_2 f(x, y, z) = xz + 2z^2 x^3 y + 3y^2.$

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 f(x, y, z) = yz + 3z^2 x^2 y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = D_2 f(x, y, z) = xz + 2z^2 x^3 y + 3y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = D_3 f(x, y, z) = xy + 2zx^3 y^2.$

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 f(x, y, z) = yz + 3z^2 x^2 y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = D_2 f(x, y, z) = xz + 2z^2 x^3 y + 3y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = D_3 f(x, y, z) = xy + 2zx^3 y^2.$

Por tanto, si derivamos un campo escalar respecto de cada una de sus variables considerando que las demás variables permanecen constantes obtenemos las derivadas parciales del mismo. Las derivadas parciales respecto a las variables x , y , z , de un campo escalar f de tres variables suelen representarse con los símbolos $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ y también $D_1 f$, $D_2 f$, $D_3 f$, respectivamente.

Por ejemplo, para el campo escalar $f(x, y, z) = xyz + z^2 x^3 y^2 + y^3$ tenemos que

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 f(x, y, z) = yz + 3z^2 x^2 y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = D_2 f(x, y, z) = xz + 2z^2 x^3 y + 3y^2.$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = D_3 f(x, y, z) = xy + 2zx^3 y^2.$

Naturalmente, si en estas igualdades se dan valores particulares a cada variable, digamos $x = a$, $y = b$, $z = c$, se obtienen los valores de las derivadas parciales en el punto (a, b, c) .

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Para interpretar gráficamente el significado de las derivadas parciales, consideremos un campo escalar f de dos variables definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. Fijemos un punto $(a, b) \in E$.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Para interpretar gráficamente el significado de las derivadas parciales, consideremos un campo escalar f de dos variables definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. Fijemos un punto $(a, b) \in E$. La derivada parcial $D_1 f(a, b)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(x, b)$ en el punto $x = a$, y la derivada parcial $D_2 f(a, b)$ es la derivada de la función $y \mapsto f(a, y)$ en el punto $y = b$.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Para interpretar gráficamente el significado de las derivadas parciales, consideremos un campo escalar f de dos variables definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. Fijemos un punto $(a, b) \in E$. La derivada parcial $D_1 f(a, b)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(x, b)$ en el punto $x = a$, y la derivada parcial $D_2 f(a, b)$ es la derivada de la función $y \mapsto f(a, y)$ en el punto $y = b$.

La gráfica de f , $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in E\}$, es una superficie en \mathbb{R}^3 .

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Para interpretar gráficamente el significado de las derivadas parciales, consideremos un campo escalar f de dos variables definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. Fijemos un punto $(a, b) \in E$. La derivada parcial $D_1 f(a, b)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(x, b)$ en el punto $x = a$, y la derivada parcial $D_2 f(a, b)$ es la derivada de la función $y \mapsto f(a, y)$ en el punto $y = b$.

La gráfica de f , $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in E\}$, es una superficie en \mathbb{R}^3 . Las funciones

$$\gamma_1(x) = (x, b, f(x, b)), \quad \gamma_2(y) = (a, y, f(a, y))$$

son curvas contenidas en dicha superficie que pasan por el punto $(a, b, f(a, b))$. Dichas curvas se obtienen cortando la superficie S por los planos $y = b$ y $x = a$.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Para interpretar gráficamente el significado de las derivadas parciales, consideremos un campo escalar f de dos variables definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$. Fijemos un punto $(a, b) \in E$. La derivada parcial $D_1 f(a, b)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(x, b)$ en el punto $x = a$, y la derivada parcial $D_2 f(a, b)$ es la derivada de la función $y \mapsto f(a, y)$ en el punto $y = b$.

La gráfica de f , $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in E\}$, es una superficie en \mathbb{R}^3 . Las funciones

$$\gamma_1(x) = (x, b, f(x, b)), \quad \gamma_2(y) = (a, y, f(a, y))$$

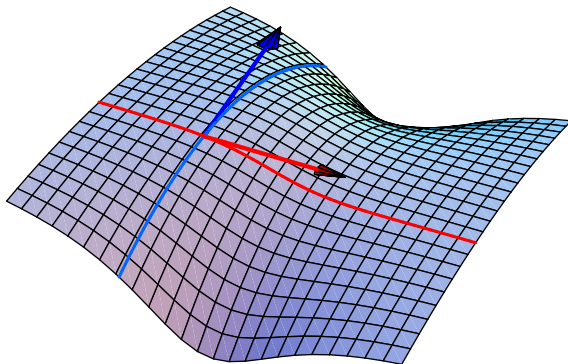
son curvas contenidas en dicha superficie que pasan por el punto $(a, b, f(a, b))$. Dichas curvas se obtienen cortando la superficie S por los planos $y = b$ y $x = a$.

Los vectores tangentes a dichas curvas en el punto $(a, b, f(a, b)) = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$ son:

$$\gamma_1'(a) = (1, 0, D_1 f(a, b)), \quad \gamma_2'(b) = (0, 1, D_2 f(a, b))$$

En la siguiente figura se ha representado la gráfica de f y las curvas obtenidas cortándola por los planos $x = a$ e $y = b$ junto a sus vectores tangentes en el punto $(a, b, f(a, b))$.

En la siguiente figura se ha representado la gráfica de f y las curvas obtenidas cortándola por los planos $x = a$ e $y = b$ junto a sus vectores tangentes en el punto $(a, b, f(a, b))$.



Sea f un campo escalar. Se define el **vector gradiente** de f en un punto \mathbf{a} como el vector

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (D_1 f(\mathbf{a}), D_2 f(\mathbf{a}), \dots, D_n f(\mathbf{a}))$$

Sea f un campo escalar. Se define el **vector gradiente** de f en un punto \mathbf{a} como el vector

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (D_1 f(\mathbf{a}), D_2 f(\mathbf{a}), \dots, D_n f(\mathbf{a}))$$

Por ejemplo, el vector gradiente del campo escalar

$f(x, y) = \sin(x^3 y) + e^{y^3 x}$ en un punto genérico (x, y) es el vector

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 y \cos(x^3 y) + y^3 e^{y^3 x}, x^3 \cos(x^3 y) + 3y^2 x e^{y^3 x}).$$

Hiperplano tangente

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} . El hiperplano en \mathbb{R}^{n+1} de ecuación cartesiana

$$x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle \quad (3)$$

se llama hiperplano tangente a f en \mathbf{a} o **hiperplano tangente** a la gráfica de f en el punto $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$.

Hiperplano tangente

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} . El hiperplano en \mathbb{R}^{n+1} de ecuación cartesiana

$$x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle \quad (3)$$

se llama hiperplano tangente a f en \mathbf{a} o **hiperplano tangente** a la gráfica de f en el punto $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$.

En particular, el plano tangente a la gráfica de un campo escalar, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de dos variables en un punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + D_1 f(a, b)(x - a) + D_2 f(a, b)(y - b) \quad (4)$$

Hiperplano tangente

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} . El hiperplano en \mathbb{R}^{n+1} de ecuación cartesiana

$$x_{n+1} = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle \quad (3)$$

se llama hiperplano tangente a f en \mathbf{a} o **hiperplano tangente** a la gráfica de f en el punto $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$.

En particular, el plano tangente a la gráfica de un campo escalar, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de dos variables en un punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + D_1 f(a, b)(x - a) + D_2 f(a, b)(y - b) \quad (4)$$

En lo que sigue consideraremos campos escalares que tienen derivadas parciales continuas.

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} y sea \mathbf{u} una dirección en \mathbb{R}^n . Entonces se verifica que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} y sea \mathbf{u} una dirección en \mathbb{R}^n . Entonces se verifica que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

Supuesto que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, se verifica que:

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} y sea \mathbf{u} una dirección en \mathbb{R}^n . Entonces se verifica que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

Supuesto que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, se verifica que:

- La dirección en la que la derivada direccional de f en \mathbf{a} es máxima es la dirección dada por el gradiente, es decir, la dirección $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$.

Sea f un campo escalar con derivadas parciales continuas en un punto \mathbf{a} y sea \mathbf{u} una dirección en \mathbb{R}^n . Entonces se verifica que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}) | \mathbf{u} \rangle$$

Supuesto que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, se verifica que:

- La dirección en la que la derivada direccional de f en a es máxima es la dirección dada por el gradiente, es decir, la dirección $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$.

- La dirección en la que la derivada direccional de f en a es mínima es la dirección opuesta a la dada por el gradiente, es decir, la dirección

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}.$$

Recuerda que la ecuación de una recta en \mathbb{R}^2 es de la forma $ax + by = c$ donde a, b no son ambos nulos. Si dicha recta pasa por un punto (x_0, y_0) entonces $ax_0 + by_0 = c$ y la ecuación de la recta puede escribirse en la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, es decir $\langle (a, b) | (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$. El vector (a, b) es ortogonal a la recta.

Recuerda que la ecuación de una recta en \mathbb{R}^2 es de la forma $ax + by = c$ donde a, b no son ambos nulos. Si dicha recta pasa por un punto (x_0, y_0) entonces $ax_0 + by_0 = c$ y la ecuación de la recta puede escribirse en la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, es decir $\langle (a, b) | (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$. El vector (a, b) es ortogonal a la recta.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables. Dado un número $c \in f(A)$, el conjunto $\Gamma_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$ es una curva en el plano que se llama **curva de nivel** de f . Dicha curva es la proyección en el plano XY de la curva que se obtiene cortando la gráfica de f por el plano $z = c$. Se dice que dicha curva está **implícitamente definida** por la ecuación $f(x, y) - c = 0$. Observa que las curvas de nivel no se cortan. Las curvas de nivel son las que se representan en los mapas topográficos.

Recuerda que la ecuación de una recta en \mathbb{R}^2 es de la forma $ax + by = c$ donde a, b no son ambos nulos. Si dicha recta pasa por un punto (x_0, y_0) entonces $ax_0 + by_0 = c$ y la ecuación de la recta puede escribirse en la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, es decir $\langle (a, b) | (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0$. El vector (a, b) es ortogonal a la recta.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables. Dado un número $c \in f(A)$, el conjunto $\Gamma_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$ es una curva en el plano que se llama **curva de nivel** de f . Dicha curva es la proyección en el plano XY de la curva que se obtiene cortando la gráfica de f por el plano $z = c$. Se dice que dicha curva está **implícitamente definida** por la ecuación $f(x, y) - c = 0$. Observa que las curvas de nivel no se cortan. Las curvas de nivel son las que se representan en los mapas topográficos.

Se verifica que el vector gradiente de un campo escalar de dos variables, f , con derivadas parciales continuas es ortogonal en todo punto en el que no se anula a la tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto. En consecuencia, supuesto que $f(u, v) = c$ y que $\nabla f(u, v) \neq (0, 0)$, la ecuación de la tangente a la curva de nivel Γ_c en (u, v) es $\langle \nabla f(u, v) | (x - u, y - v) \rangle = 0$.

La ecuación de un plano en \mathbb{R}^3 es de la forma $ax + by + cz = d$ donde a, b, c no son todos nulos. Si dicho plano pasa por (x_0, y_0, z_0) entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ y la ecuación del plano puede escribirse en la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, es decir $\langle (a, b, c) | (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. El vector (a, b, c) es ortogonal al plano.

La ecuación de un plano en \mathbb{R}^3 es de la forma $ax + by + cz = d$ donde a, b, c no son todos nulos. Si dicho plano pasa por (x_0, y_0, z_0) entonces

$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ y la ecuación del plano puede escribirse en la forma

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, es decir

$\langle (a, b, c) | (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. El vector (a, b, c) es ortogonal al plano.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de tres variables. Dado un número $c \in f(A)$, el conjunto

$$S_c = \{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\}$$

es una superficie en el espacio que se llama **superficie de nivel** de f . Se dice que dicha superficie está **implícitamente definida** por la ecuación $f(x, y, z) - c = 0$. Observa que las superficies de nivel no se cortan.

La ecuación de un plano en \mathbb{R}^3 es de la forma $ax + by + cz = d$ donde a, b, c no son todos nulos. Si dicho plano pasa por (x_0, y_0, z_0) entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ y la ecuación del plano puede escribirse en la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, es decir $\langle (a, b, c) | (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$. El vector (a, b, c) es ortogonal al plano. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de tres variables. Dado un número $c \in f(A)$, el conjunto

$$S_c = \{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\}$$

es una superficie en el espacio que se llama **superficie de nivel** de f . Se dice que dicha superficie está **implícitamente definida** por la ecuación $f(x, y, z) - c = 0$. Observa que las superficies de nivel no se cortan.

Se verifica que el vector gradiente de un campo escalar de tres variables, f , con derivadas parciales continuas es ortogonal en todo punto en el que no se anula al plano tangente a la superficie de nivel que pasa por dicho punto. En consecuencia, supuesto que $f(u, v, w) = c$ y que $\nabla f(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel S_c en (u, v, w) es $\langle \nabla f(u, v, w) | (x - u, y - v, z - w) \rangle = 0$.

Cuando una curva Γ en \mathbb{R}^3 viene dada como intersección de dos superficies S_1 y S_2 , la tangente en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ a la curva Γ es la recta intersección de los planos tangentes a las superficies en dicho punto.

Cuando una curva Γ en \mathbb{R}^3 viene dada como intersección de dos superficies S_1 y S_2 , la tangente en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ a la curva Γ es la recta intersección de los planos tangentes a las superficies en dicho punto. Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \\ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\} \end{cases} \quad \Gamma = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

Cuando una curva Γ en \mathbb{R}^3 viene dada como intersección de dos superficies S_1 y S_2 , la tangente en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ a la curva Γ es la recta intersección de los planos tangentes a las superficies en dicho punto. Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \\ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\} \end{cases} \quad \Gamma = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = f(x, y, z) = 0\}$$

Entonces, las ecuaciones implícitas de la recta tangente a Γ en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ son

$$\begin{cases} \langle \nabla f(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \\ \langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \end{cases}$$

Cuando una curva Γ en \mathbb{R}^3 viene dada como intersección de dos superficies S_1 y S_2 , la tangente en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ a la curva Γ es la recta intersección de los planos tangentes a las superficies en dicho punto. Por ejemplo, si las superficies vienen dadas por sus ecuaciones implícitas.

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \\ S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\} \end{cases} \quad \Gamma = S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = f(x, y, z) = 0\}$$

Entonces, las ecuaciones implícitas de la recta tangente a Γ en un punto $(a, b, c) \in \Gamma$ son

$$\begin{cases} \langle \nabla f(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \\ \langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \end{cases}$$

Donde se supone que los vectores gradiente $\nabla f(a, b, c)$, $\nabla g(a, b, c)$ son linealmente independientes pues, en otro caso, la recta tangente a la curva Γ en (a, b, c) no está definida.

Derivadas parciales de orden superior

Supongamos un campo escalar f que tiene derivadas parciales $D_k f$ en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Las funciones $D_k f$ son también campos escalares que podemos volver a derivar parcialmente en puntos de E .

Derivadas parciales de orden superior

Supongamos un campo escalar f que tiene derivadas parciales $D_k f$ en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Las funciones $D_k f$ son también campos escalares que podemos volver a derivar parcialmente en puntos de E . Obtenemos de esta forma las *derivadas parciales de segundo orden* de f , es decir las funciones $D_j(D_k f)$, que se representan simbólicamente de las formas

$$D_{jk} f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$$

Derivadas parciales de orden superior

Supongamos un campo escalar f que tiene derivadas parciales $D_k f$ en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Las funciones $D_k f$ son también campos escalares que podemos volver a derivar parcialmente en puntos de E . Obtenemos de esta forma las *derivadas parciales de segundo orden* de f , es decir las funciones $D_j(D_k f)$, que se representan simbólicamente de las formas

$$D_{jk}f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$$

De forma análoga se definen las derivadas parciales de tercer orden de f como las derivadas parciales de las derivadas parciales de segundo orden de f y se representan por

$$D_{jkm}f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_m}(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3}(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k^2 \partial x_j}(\mathbf{x})$$

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente resultado.

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente resultado. Se dice que un campo escalar f es de clase C^k en un abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ si f tiene derivadas parciales de orden k continuas en E .

Es natural preguntarse si el orden en que se realizan las derivadas debe ser o no tenido en cuenta. Afortunadamente, en la mayoría de los casos podemos olvidarlo porque se verifica el siguiente resultado.

Se dice que un campo escalar f es de clase C^k en un abierto $E \subset \mathbb{R}^n$ si f tiene derivadas parciales de orden k continuas en E .

Las derivadas parciales de orden menor o igual que k de un campo escalar de clase C^k solamente dependen del número de veces que se deriva parcialmente respecto de cada variable, pero el orden en que se realicen dichas derivaciones no afecta para nada al resultado final.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto $\mathbf{a} \in E$, si \mathbf{a} es un punto interior de E y existe un número $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ y $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto $\mathbf{a} \in E$, si \mathbf{a} es un punto interior de E y existe un número $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ y $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$. Cuando estas desigualdades se verifican de forma estricta se dice que el máximo o el mínimo relativo es estricto.

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto $\mathbf{a} \in E$, si \mathbf{a} es un punto interior de E y existe un número $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ y $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$. Cuando estas desigualdades se verifican de forma estricta se dice que el máximo o el mínimo relativo es estricto. Los puntos en los que f tiene un máximo o un mínimo relativos se llaman **extremos relativos** de f .

Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto $\mathbf{a} \in E$, si \mathbf{a} es un punto interior de E y existe un número $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \subset E$ y $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$) para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$. Cuando estas desigualdades se verifican de forma estricta se dice que el máximo o el mínimo relativo es estricto. Los puntos en los que f tiene un máximo o un mínimo relativos se llaman **extremos relativos** de f .

Condición necesaria de extremo relativo. Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en un punto $\mathbf{a} \in E$ y además que el vector gradiente de f en \mathbf{a} está definido. Entonces se verifica que $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Es decir, las derivadas parciales de primer orden de f en \mathbf{a} son todas nulas.

Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar f se llaman **puntos críticos** de f .

Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar f se llaman **puntos críticos** de f . Los puntos críticos de un campo escalar que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar f se llaman **puntos críticos** de f . Los puntos críticos de un campo escalar que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Si f es un campo escalar, en los puntos críticos el hiperplano tangente es “horizontal”.

Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar f se llaman **puntos críticos** de f . Los puntos críticos de un campo escalar que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Si f es un campo escalar, en los puntos críticos el hiperplano tangente es “horizontal”.

La condición necesaria de extremo relativo no es suficiente. Por ejemplo, el campo escalar $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un punto crítico en $(0, 0)$, pero no tiene extremo relativo en dicho punto pues en toda bola centrada en $(0, 0)$ toma valores positivos y negativos.

Los puntos donde se anula el gradiente de un campo escalar f se llaman **puntos críticos** de f . Los puntos críticos de un campo escalar que no son extremos relativos se llaman **puntos de silla**.

Si f es un campo escalar, en los puntos críticos el hiperplano tangente es “horizontal”.

La condición necesaria de extremo relativo no es suficiente. Por ejemplo, el campo escalar $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un punto crítico en $(0, 0)$, pero no tiene extremo relativo en dicho punto pues en toda bola centrada en $(0, 0)$ toma valores positivos y negativos.

Al igual que para funciones de una variable, la derivada segunda proporciona una condición suficiente de extremo relativo, para campos escalares de varias variables las derivadas parciales de segundo orden nos van a permitir dar una condición suficiente de extremo relativo.

Sea f un campo escalar de n variables que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} . La matriz $n \times n$

$$H(f, \mathbf{a}) = (D_{ij}f(\mathbf{a}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

se llama **matriz hessiana** de f en \mathbf{a} .

Sea f un campo escalar de n variables que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} . La matriz $n \times n$

$$H(f, \mathbf{a}) = (D_{ij}f(\mathbf{a}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

se llama **matriz hessiana** de f en \mathbf{a} .

Observa que la matriz hessiana es simétrica porque $D_{ij}f(\mathbf{a}) = D_{ji}f(\mathbf{a})$. Dicha matriz define una forma cuadrática, que representaremos por $Q(f, \mathbf{a})$, que viene dada para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk}f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

donde el punto “.” indica producto matricial y \mathbf{x}^t es el vector columna \mathbf{x} .

Una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ se llama:

Una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ se llama:

- **Definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ se llama:

- **Definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **Definida negativa** si $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ se llama:

- **Definida positiva** si $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **Definida negativa** si $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **No definida o indefinida** si hay vectores \mathbf{x} para los que $Q(\mathbf{x}) > 0$ y hay vectores \mathbf{x} para los que $Q(\mathbf{x}) < 0$.

Condiciones suficientes de extremo relativo. Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} **interior** de E que además **es un punto crítico** de f . Sea $Q(f, \mathbf{a})$ la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en \mathbf{a} .

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

Condiciones suficientes de extremo relativo. Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} **interior** de E que además **es un punto crítico** de f . Sea $Q(f, \mathbf{a})$ la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en \mathbf{a} .

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es definida positiva entonces f tiene en \mathbf{a} un mínimo relativo estricto.

Condiciones suficientes de extremo relativo. Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} **interior** de E que además **es un punto crítico** de f . Sea $Q(f, \mathbf{a})$ la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en \mathbf{a} .

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es definida positiva entonces f tiene en \mathbf{a} un mínimo relativo estricto.
- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es definida negativa entonces f tiene en \mathbf{a} un máximo relativo estricto.

Condiciones suficientes de extremo relativo. Sea f un campo escalar definido en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un punto \mathbf{a} **interior** de E que además **es un punto crítico** de f . Sea $Q(f, \mathbf{a})$ la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f en \mathbf{a} .

$$Q(f, \mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot H(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{jk} f(\mathbf{a}) x_k x_j$$

- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es definida positiva entonces f tiene en \mathbf{a} un mínimo relativo estricto.
- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es definida negativa entonces f tiene en \mathbf{a} un máximo relativo estricto.
- Si la forma cuadrática $Q(f, \mathbf{a})$ es no definida entonces f tiene un punto de silla en \mathbf{a} .

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Se verifica que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales.

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Se verifica que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales. Se verifica que:

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Se verifica que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales. Se verifica que:

- La forma cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es definida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de \mathcal{A} son positivos.

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Se verifica que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales. Se verifica que:

- La forma cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es definida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de \mathcal{A} son positivos.
- La forma cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es definida negativa si, y sólo si, todos los valores propios de \mathcal{A} son negativos.

Sean $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz simétrica de números reales y

$$Q_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{x}^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j \quad (5)$$

la forma cuadrática definida por \mathcal{A} .

Los *valores propios* de \mathcal{A} son las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$, que se define como el determinante de la matriz $\mathcal{A} - \lambda I$:

$$p(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda I|$$

Se verifica que, en la situación que estamos considerando, las raíces de dicho polinomio son todas reales. Se verifica que:

- La forma cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es definida positiva si, y sólo si, todos los valores propios de \mathcal{A} son positivos.
- La forma cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es definida negativa si, y sólo si, todos los valores propios de \mathcal{A} son negativos.
- La cuadrática $Q_{\mathcal{A}}$ es no definida si, y sólo si, \mathcal{A} tiene valores propios positivos y negativos.

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} .

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} .

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} . Se verifica que:

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} . Se verifica que:

- *La forma cuadrática es definida positiva si, y sólo si, todos los menores principales son positivos.*

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} . Se verifica que:

- *La forma cuadrática es definida positiva si, y sólo si, todos los menores principales son positivos .*
- *La forma cuadrática es definida negativa si, y sólo si, los menores principales de orden par son positivos y los menores principales de orden impar son negativos.*

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i,j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} . Se verifica que:

- *La forma cuadrática es definida positiva si, y sólo si, todos los menores principales son positivos .*
- *La forma cuadrática es definida negativa si, y sólo si, los menores principales de orden par son positivos y los menores principales de orden impar son negativos.*
- *Si los menores principales son nulos a partir de uno de ellos en adelante y los no nulos son positivos o van alternando signo siendo el primero de ellos negativo, no puede afirmarse nada.*

Otro criterio para estudiar el carácter de la forma cuadrática (5) se basa en la sucesión de signos de los *menores principales* de la matriz \mathcal{A} . El menor principal de orden k de la matriz \mathcal{A} es el determinante $\Delta_k = |a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq k}$ de la matriz formada por las primeras k filas y k columnas de la matriz \mathcal{A} . Se verifica que:

- *La forma cuadrática es definida positiva si, y sólo si, todos los menores principales son positivos .*
- *La forma cuadrática es definida negativa si, y sólo si, los menores principales de orden par son positivos y los menores principales de orden impar son negativos.*
- *Si los menores principales son nulos a partir de uno de ellos en adelante y los no nulos son positivos o van alternando signo siendo el primero de ellos negativo, no puede afirmarse nada.*
- *En los demás casos la forma cuadrática es no definida.*

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $(a, b) \in A$ es un punto crítico de f y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a, b) . Notemos $\det H(f, (a, b))$ su determinante.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $(a, b) \in A$ es un punto crítico de f y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a, b) . Notemos $\det H(f, (a, b))$ su determinante.

- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo estricto.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $(a, b) \in A$ es un punto crítico de f y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a, b) . Notemos $\det H(f, (a, b))$ su determinante.

- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo estricto.
- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo estricto.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $(a, b) \in A$ es un punto crítico de f y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a, b) . Notemos $\det H(f, (a, b))$ su determinante.

- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo estricto.
- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo estricto.
- Si $\det H(f, (a, b)) < 0$ entonces f no tiene extremo relativo en (a, b) . Se dice que (a, b) es un punto de silla de f .

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea f un campo escalar definido en A que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Supongamos que $(a, b) \in A$ es un punto crítico de f y sea

$$H(f, (a, b)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en (a, b) . Notemos $\det H(f, (a, b))$ su determinante.

- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo estricto.
- Si $\det H(f, (a, b)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo estricto.
- Si $\det H(f, (a, b)) < 0$ entonces f no tiene extremo relativo en (a, b) . Se dice que (a, b) es un punto de silla de f .
- Cuando $\det H(f, (a, b)) = 0$ el conocimiento de la matriz hessiana no permite decidir si hay o no hay extremo relativo en (a, b) .

Cálculo de extremos absolutos en conjuntos compactos

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, y de que todo campo escalar con derivadas parciales continuas es continuo, se verifica que todo campo escalar con derivadas parciales continuas en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

Cálculo de extremos absolutos en conjuntos compactos

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, y de que todo campo escalar con derivadas parciales continuas es continuo, se verifica que todo campo escalar con derivadas parciales continuas en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

Dichos valores o bien se alcanzan en el interior de K , en cuyo caso deben ser puntos críticos de f , o bien se alcanzan en la frontera.

Cálculo de extremos absolutos en conjuntos compactos

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, y de que todo campo escalar con derivadas parciales continuas es continuo, se verifica que todo campo escalar con derivadas parciales continuas en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ alcanza en dicho conjunto un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

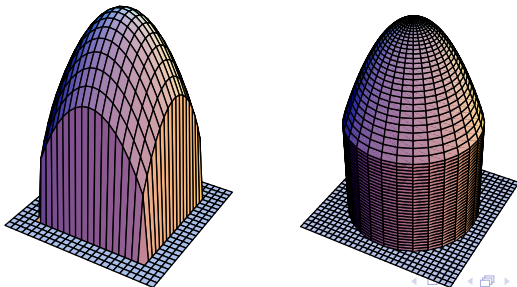
Dichos valores o bien se alcanzan en el interior de K , en cuyo caso deben ser puntos críticos de f , o bien se alcanzan en la frontera.

Cuando la frontera de K está formada por curvas conocidas es fácil calcular los puntos de la frontera en los que el campo puede alcanzar sus extremos absolutos. Una vez calculados todos estos puntos, se evalúa en ellos el campo para saber en cuales se alcanzan los extremos absolutos.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y acotado de dos variables definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in A$. Consideremos el “cilindro” en \mathbb{R}^3 que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f , es decir el conjunto

$$C(f, A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}.$$

Las siguientes figuras muestran este conjunto para la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ y los conjuntos $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.



El valor de integral doble $\iint_A f(x,y) d(x,y)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana A . En tal caso la integral doble proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina A .

El valor de integral doble $\iint_A f(x,y) d(x,y)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana A . En tal caso la integral doble proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina A .

Las integrales dobles también permiten calcular áreas planas. En efecto, basta tener en cuenta que si f es la función constante igual a 1, esto es $f(x,y) = 1$ para todo $(x,y) \in A$, entonces se tiene que $\text{volumen}(C(f,A)) = \text{área}(A)$, pues el volumen de un cilindro de altura constante igual a 1 es numéricamente igual al área de su base.

$$\iint_A d(x,y) = \text{área}(A) \quad (6)$$

Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble depende de cómo sea el recinto de integración, es decir el conjunto A base del cilindro.

Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble depende de cómo sea el recinto de integración, es decir el conjunto A base del cilindro. Cuando A es un rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$ el cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de dos integrales simples gracias al siguiente resultado:

Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble depende de cómo sea el recinto de integración, es decir el conjunto A base del cilindro. Cuando A es un rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$ el cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de dos integrales simples gracias al siguiente resultado:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy \quad (7)$$

Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble depende de cómo sea el recinto de integración, es decir el conjunto A base del cilindro. Cuando A es un rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$ el cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de dos integrales simples gracias al siguiente resultado:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy \quad (7)$$

Las integrales que figuran a la derecha en esta igualdad se llaman *integrales iteradas*. Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples.

Cálculo de integrales dobles

El cálculo de una integral doble depende de cómo sea el recinto de integración, es decir el conjunto A base del cilindro. Cuando A es un rectángulo $A = [a, b] \times [c, d]$ el cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de dos integrales simples gracias al siguiente resultado:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy \quad (7)$$

Las integrales que figuran a la derecha en esta igualdad se llaman *integrales iteradas*. Observa que las integrales iteradas son dos

integrales simples. Para calcular $\int_c^d f(x,y) dy$ lo que se hace es

integrar respecto a la variable y considerando x fija. Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ y usar la regla de Barrow. Análogo procedimiento se sigue para calcular la otra integral iterada.

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad (\text{tipo I})$$

$$A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (\text{tipo II})$$

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad (\text{tipo I})$$

$$A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (\text{tipo II})$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (8)$$

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (9)$$

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad (\text{tipo I})$$

$$A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (\text{tipo II})$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (8)$$

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (9)$$

Observa que para el caso en que $f(x, y) = 1$ recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad (\text{tipo I})$$

$$A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (\text{tipo II})$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (8)$$

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (9)$$

Observa que para el caso en que $f(x, y) = 1$ recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

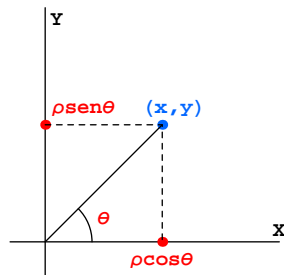
Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x, y) del plano son el par de números (ρ, ϑ) dados por

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \quad (\rho > 0, -\pi < \vartheta \leq \pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x, y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x + iy$.

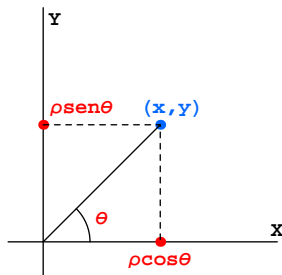


Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x, y) del plano son el par de números (ρ, ϑ) dados por

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \quad (\rho > 0, -\pi < \vartheta \leq \pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x, y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x + iy$.



La fórmula del cambio de variables a coordenadas polares se expresa por

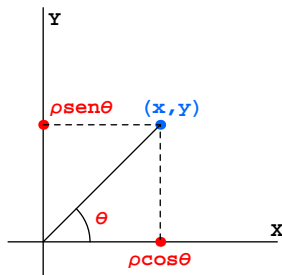
$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d(\rho, \vartheta) \quad (10)$$

Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x, y) del plano son el par de números (ρ, ϑ) dados por

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \quad (\rho > 0, -\pi < \vartheta \leq \pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x, y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x + iy$.



La fórmula del cambio de variables a coordenadas polares se expresa por

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d(\rho, \vartheta) \quad (10)$$

Donde el conjunto B es la expresión de A en coordenadas polares, es decir

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \in A\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : a \leq \rho \cos \vartheta \leq b, g(\rho \cos \vartheta) \leq \rho \sin \vartheta \leq h(\rho \cos \vartheta)\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : a \leq \rho \cos \vartheta \leq b, g(\rho \cos \vartheta) \leq \rho \sin \vartheta \leq h(\rho \cos \vartheta)\}$$

Es importante describir bien el conjunto B porque para calcular la integral

$$\iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho \, d(\rho, \vartheta)$$

tienes que calcular dos integrales simples como ya hemos visto anteriormente.

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : a \leq \rho \cos \vartheta \leq b, g(\rho \cos \vartheta) \leq \rho \sin \vartheta \leq h(\rho \cos \vartheta)\}$$

Es importante describir bien el conjunto B porque para calcular la integral

$$\iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho \, d(\rho, \vartheta)$$

tienes que calcular dos integrales simples como ya hemos visto anteriormente.

Si, por ejemplo

$$B = \{(\rho, \vartheta) : \alpha \leq \vartheta \leq \beta, g(\vartheta) \leq \rho \leq h(\vartheta)\}$$

entonces

$$\iint_A f(x, y) \, d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho \, d(\rho, \vartheta) = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{g(\vartheta)}^{h(\vartheta)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho \, d\rho \right] d\vartheta$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo.

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo. Si, por ejemplo, A es el disco $D((0,0), R)$ de centro el origen y radio R , $D((0,0), R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : \rho \leq R\} =]0, R] \times]-\pi, \pi]$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo. Si, por ejemplo, A es el disco $D((0,0), R)$ de centro el origen y radio R , $D((0,0), R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, entonces

$$B = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] : \rho \leq R\} =]0, R] \times]-\pi, \pi]$$

Por tanto

$$\iint_{D((0,0), R)} f(x, y) d(x, y) = \int_0^R \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\vartheta \right] d\rho = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^R f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right] d\vartheta$$